Kræfter og Energi

Jacob Nielsen[1]

Nedenstående sammenhæng mellem potentiel energi og kraft er fundamental og anvendes indenfor mange af fysikkens felter.

$$\boxed{F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}}$$

kraften i x-aksens retning hænger sammen med den potentielle energis ændring, når vi bevæger os i denne retning. Hvis vi for eksempel kører op ad en bakke, så vokser den potentielle energi. Ændringen i potentiel energi er således positiv, og minusset i formlen bevirker, at kraften er rettet mod bevægelsen - i overenstemmelse med, hvad vi oplever. Eksemplet nedenfor viser, hvordan dette udtrykkes matematisk.

Eksempel Lokalt tyngdefelt

Hvis vi lader x-aksen pege lodret opad, så er tyngdekraften på et legeme med masse m givet ved:

$$F(x) = -m \cdot g$$

idet tyngdefeltet - altså tyngdekraften pr. masse lokalt kan regnes konstant.
Indsætte dette i formlen ovenfor fås:

$$-m \cdot g = -\frac{dE_{pot}}{dx}$$

$$\Updownarrow$$

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot x + konst$$

Den funktion, der differentieret giver en konstant (m·g) er (m·g·x + konst.). Vi ser her også grunden til, at den potentielle energi kun er defineret på nær en konstant; eller sagt på en anden måde - vi bestemmer selv nulpunktet for den potentielle energi.

[1] Datadrev\Fysik\Mekanik\Kræfter og Energi 200808.wpd

Eksempel Rotationssymmetrisk Gravitationsfelt.

Feltet udenfor en kugleformet masse som jorden - eller langt fra en hvilken som helst masse - er med god tilnærmelse rotationssymmetrisk. Ser vi på feltet omkring jorden, og betegner vi afstanden fra jordens centrum med: r, gælder:

$$F_m(r) = -G \cdot \frac{m \cdot M_{jord}}{r^2}$$

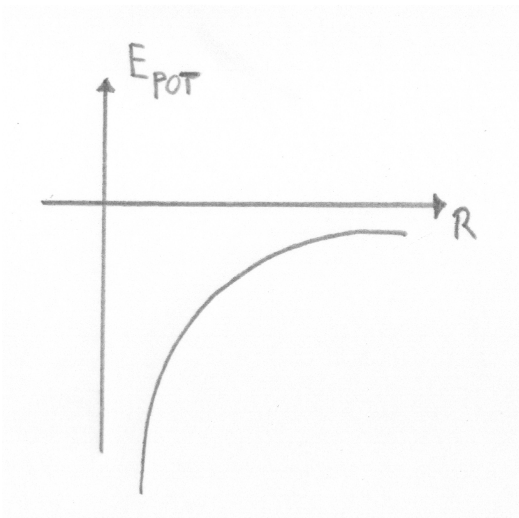
hvor G er gravitationskonstanten og m er en masse, der befinder sig i jordens tyngdefelt. Kraften på massen m er rettet mod jorden - altså i negativ retning på r-aksen. Sammenhængen mellem potentiel energi og kraft giver nu:

$$\frac{-dE^m_{pot}}{dr} = F_m(r) = -G \cdot \frac{m \cdot M_{jord}}{r^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$E^m_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M_{jord}}{r} + konst$$

normalt lægges nulpunktet for den potentielle energi i det uendeligt fjerne, hvorved konstanten bliver nul.



Ud fra definitionen på potentiel energi kan vi finde sammenhængen mellem ændringen i potentiel energi og feltkraftens arbejde.

$$\langle F \rangle = \frac{-\Delta E_{pot}}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta E_{pot} = -\langle F \rangle \cdot \Delta x = -A$$

Den kantede parentes betyder: "Middelværdi". Undervejs har vi har brugt, at en krafts arbejde er defineret som produktet af kraften og flytningen i kraftens retning. For det lokale tyngde felt betyder det:

$$\Delta E_{pot} = -F_{tyngde} \cdot \Delta x = -(-m \cdot g) \cdot \Delta x = m \cdot g \cdot \Delta x$$

idet x er målt positiv i retningen modsat tyngdefeltet (opad), er det den velkendte formel.
Tager vi højde for at kraften kan variere, har vi i alt:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta E_{pot} &= -A_{felt} = -\int_{x1}^{x2} F_{felt}(x) \cdot dx = \\ -\Delta x \cdot &\left(\frac{1}{\Delta x} \int_{x1}^{x2} F_{felt}(x) \cdot dx \right) = -\Delta x \cdot \langle F_{felt} \rangle\end{aligned}}$$

Integralet betyder blot, at vi deler flytningen op i uendeligt små stykker dx, inden for hvilke kraften kan regnes konstant. Alle de små bidrag lægges så sammen - integraltegnet betyder jo: "Sum". I den sidste linje har vi brugt definitionen på middelværdi.

Mekanikkens energisætning siger, at den mekaniske energi er konstant, hvis der ikke er andre ydre kræfter end dem, der er inkluderet i den potentielle energi. Det lokale tyngdefelt er inkluderet, men det er luftmodstanden for eksempel ikke.
Mekanikkens energisætning følger af det forgående samt definitionen på kinetisk energi:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\cdot v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left(p^2\right) =$$

$$\frac{1}{m}\cdot p\frac{dp}{dt} = \frac{1}{m}\cdot p\cdot F_{res} = v\cdot F_{res} = \frac{ds}{dt}\cdot F_{res}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta E_{kin} = \int\frac{dE_{kin}}{dt}dt = \int\frac{ds}{dt}\cdot F_{res}\cdot dt = \int F_{res}\cdot ds = \Delta A_{res} = \Delta A_{felt} + \Delta A_{andre}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta E_{kin} - \Delta A_{felt} = \Delta A_{andre}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta A_{andre}$$

udledningen gælder ikke relativistisk, idet vi ved det tredje lighedstegn har ladet massen gå udenfor differentiationen som en konstant. Ved andet lighedstegn benyttes definitionen på impuls (p=mv), og ved femte lighedstegn benyttes Newtons anden lov på impulsform.
Vi kan forstå definitionen af E_{kin} ved at følge resonementet ovenfor baglæns. Den resulterende krafts arbejde går til forøgelse af bevægelsesenergien. Det virker naturligt. Hvis vi så bruger Newtons anden lov, der er veletabelret, og definitionen på arbejde, så ender vi med, at bevægelsesenergien skal være en halv gange massen gange kvadratet på hastigheden.
De vigtigste formler fremhæves nedenfor. De gælder generelt for alle kraftfelter med en potentiel energi, men kun i det urelativistiske tilfælde - det vil sige for hastigheder meget mindre end lyshastigheden.

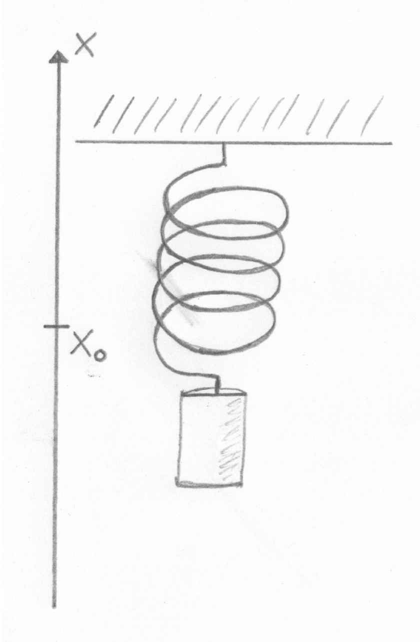
$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta E_{kin} = \Delta A_{res}\\&\Delta E_{mek} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta A_{andre}\\&\Delta A_{andre} = 0 \;\Rightarrow\; E_{mek} = konst.\end{aligned}}$$

Ved frit fald er den resulterende kraft lig med tyngdekraften, og ændringen i kinetisk energi er lig med tyngdekraftens arbejde. Bevæger vi os nedad er arbejdet positivt, og den kinetiske energi stiger. Dedn mekaniske energi er derimod konstant.
Luftmodstanden er rettet mod bevægelsen og den udfører derfor et negativt arbejde. Ændringen i mekanisk energi er lig med dette arbejde, så den mekaniske energi falder.

Eksempel Potentiel energi i fjeder.

En klods med masse m ophænges i en fjeder, der har fjederkonstant k. Fjederen opfylder Hooks lov, og vi ser bort fra fjederens masse. Ophængningspunktets position betegnes med x og regnes positiv nedad. Hvis fjederen er ubelastet, befinder ophængningspunktet sig i positionen x_0.

Hooks lov og sammenhængen mellem potentiel energi og arbejde giver den potentielle energi i fjederen:



$$F_{fjeder} = -k\cdot(x-x_0)$$

$$\Delta E_{pot}^{fjeder} = -A_{fjeder} =$$

$$-\int_{x_0}^{x} F_{fjeder}\cdot dx = \int_{x_0}^{x} k\cdot(x-x_0)\cdot dx =$$

$$k\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot x^2 - x\cdot x_0\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}k\cdot\left(x-x_0\right)^2$$

Den potentielle energi vokser med kvadratet på deformationen ($x-x_0$).

$$\boxed{\Delta E_{pot}^{fjeder} = \frac{1}{2}k\cdot\left(x-x_0\right)^2}$$

Hvis fjederen belastes af et lod, vil ligevægtspositionen rykke nedad til x_1, hvor fjederkraft og tyngdekraft er lige store men modsat rettede.

$$k \cdot (x_0 - x_1) = m \cdot g$$
$$\Updownarrow$$
$$x_0 = \frac{m \cdot g}{k} + x_1$$

Den samlede potentielle energi bliver nu:

$$E_{pot} = E_{pot}^{tyngde} + E_{pot}^{fjeder} = m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - x_0)^2 =$$
$$m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x - \left(\frac{m \cdot g}{k} + x_1 \right) \right)^2 =$$
$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - x_1)^2 + \left[\frac{(m \cdot g)^2}{2k} + m \cdot g \cdot x_1 \right]$$

størrelsen i den kantede parentes afhænger ikke af x. Når vi bestemmer den resulterende kraft, ved at differentiere den potentielle energi, giver dette led intet bidrag til kraften.

$$F_{res} = \frac{-dE_{pot}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - x_1)^2 \right) =$$
$$k \cdot (x_1 - x)$$

tyngdeaccelerationen optræder ikke i udtrykket for den resulterende kraft. Til gengæld er ligevægtsstillingen flyttet. Den belastede fjeder vil svinge som den ubelastede, men om et nyt ligevægtspunkt. Vi skal i anden sammenhæng se, at der bliver tale om en harmonisk svingning.